Demostración del problema del paro (*Halting problem*)

Introducción a las ciencias de la computación

Antonio López Jaimes

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

Definición del problema

- El problema del paro consiste en determinar si una máquina de Turing cualquiera se detendrá ante cualquier entrada dada.
- Es decir, si existe una máquina MT_h capaz de determinar si cualquier otra máquina se va a detener o no.
- Es conocido que el **problema del alto** es **indecidible**.

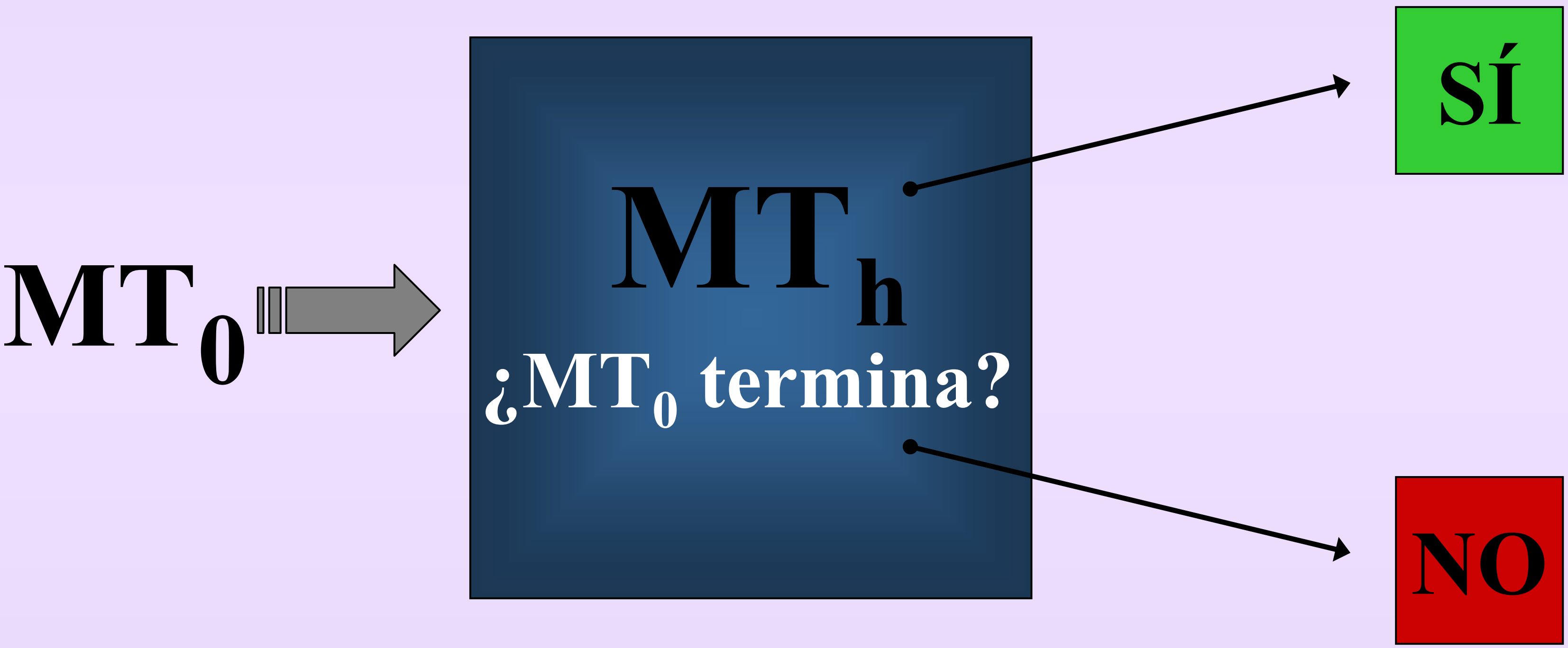
Demostración de la indecibilidad

- Para demostrar que el problema del alto es indecidible tenemos que probar la siguiente afirmación:
  - **NO existe una máquina MT_h** que tomando como entrada cualquier máquina MT_0, termine después de un tiempo finito y responda '**SÍ**' cuando MT_0 termine y '**NO**' cuando MT_0 no termine.

Funcionamiento de la máquina hipotética MT_h

Si MT_h **existe** $\Rightarrow$ el problema **es decidible**

Cuando MT_0 termina



Cuando MT_0 no termina

Si MT_h **NO existe** $\Rightarrow$ el problema **es indecidible**

Estrategia de la demostración

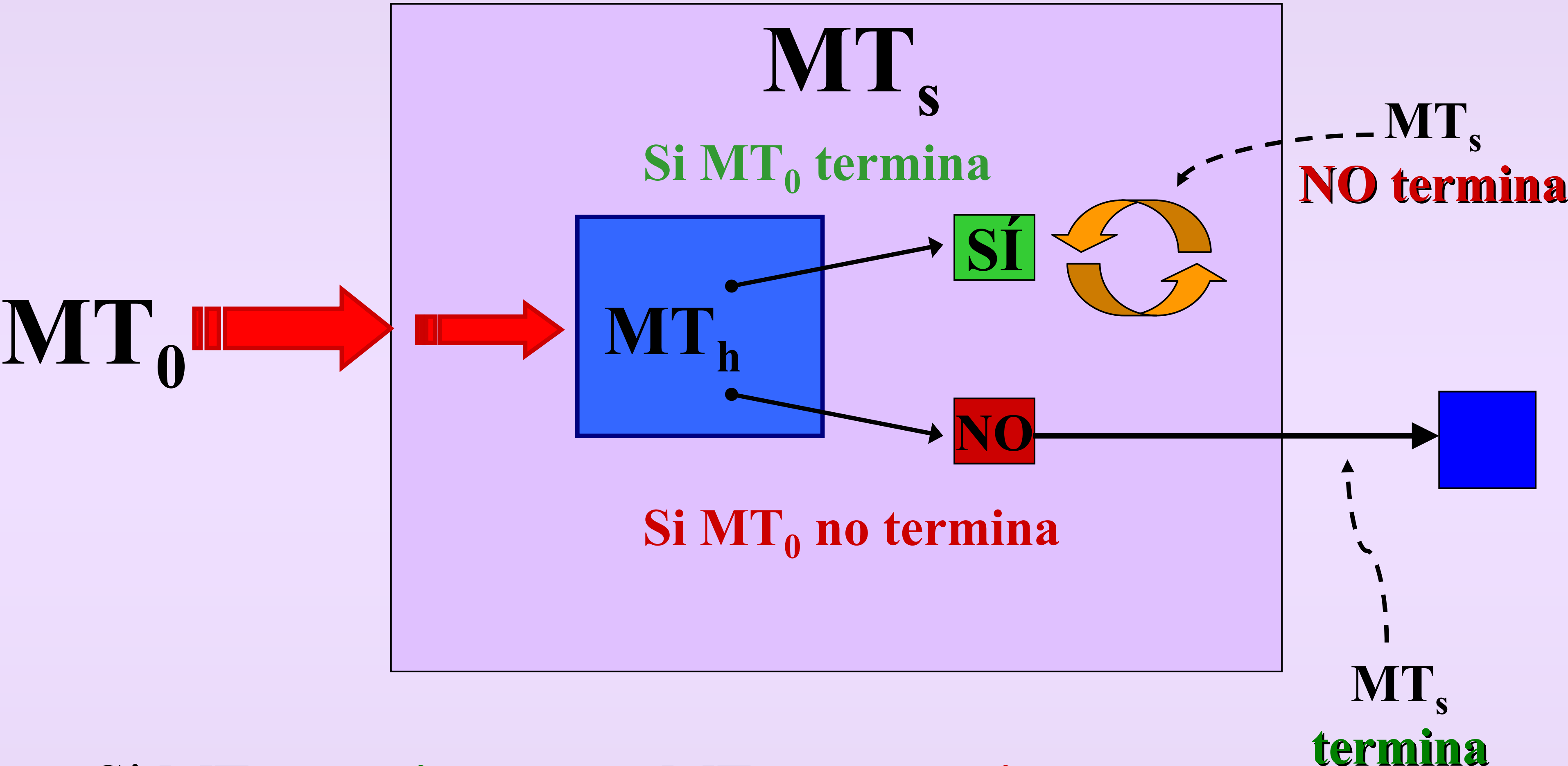
- Por **contradicción** demostraremos que **no existe una máquina MT_h** que resuelva el problema del alto.
- **Hipótesis:**
  - Supondremos que existe MT_h.

- Al final llegaremos a una contradicción derivada de esta hipótesis.

Estrategia de la demostración

- Construyamos una nueva máquina **MT$_s$** que se comporte de la siguiente manera:
  - La nueva máquina MT$_s$ tomará como entrada una máquina dada MT$_0$.
  - MT$_s$ ejecutará la máquina MT$_h$ y le dará como entrada la máquina MT$_0$. Por hipótesis, MT$_h$ terminará en algún momento y responderá 'SÍ' o 'NO' (según MT$_0$ termine o no).
  - Si MT$_h$ dice '**SÍ**', entonces **MT$_s$ entra en un ciclo infinito y no termina**.
  - Si MT$_h$ dice '**NO**', entonces **MT$_s$ se detiene inmediatamente** (la salida no importa).

La nueva máquina MT_s



Si MT_0 **termina** $\Rightarrow$ MT_S **no termina**

Si MT_0 **no termina** $\Rightarrow$ MT_S **termina**

¿Qué sucede si MT_s es la entrada de sí misma?

- Existe cierta entrada para la cual MT_s produce una contradicción.
- La máquina de entrada que causa esta contradicción es la propia MT_s (MT_0=MT_s).

Si MT_S **termina**	$\Rightarrow$ MT_S **no termina!!**
Si MT_S **no termina**	$\Rightarrow$ MT_S **termina!!**

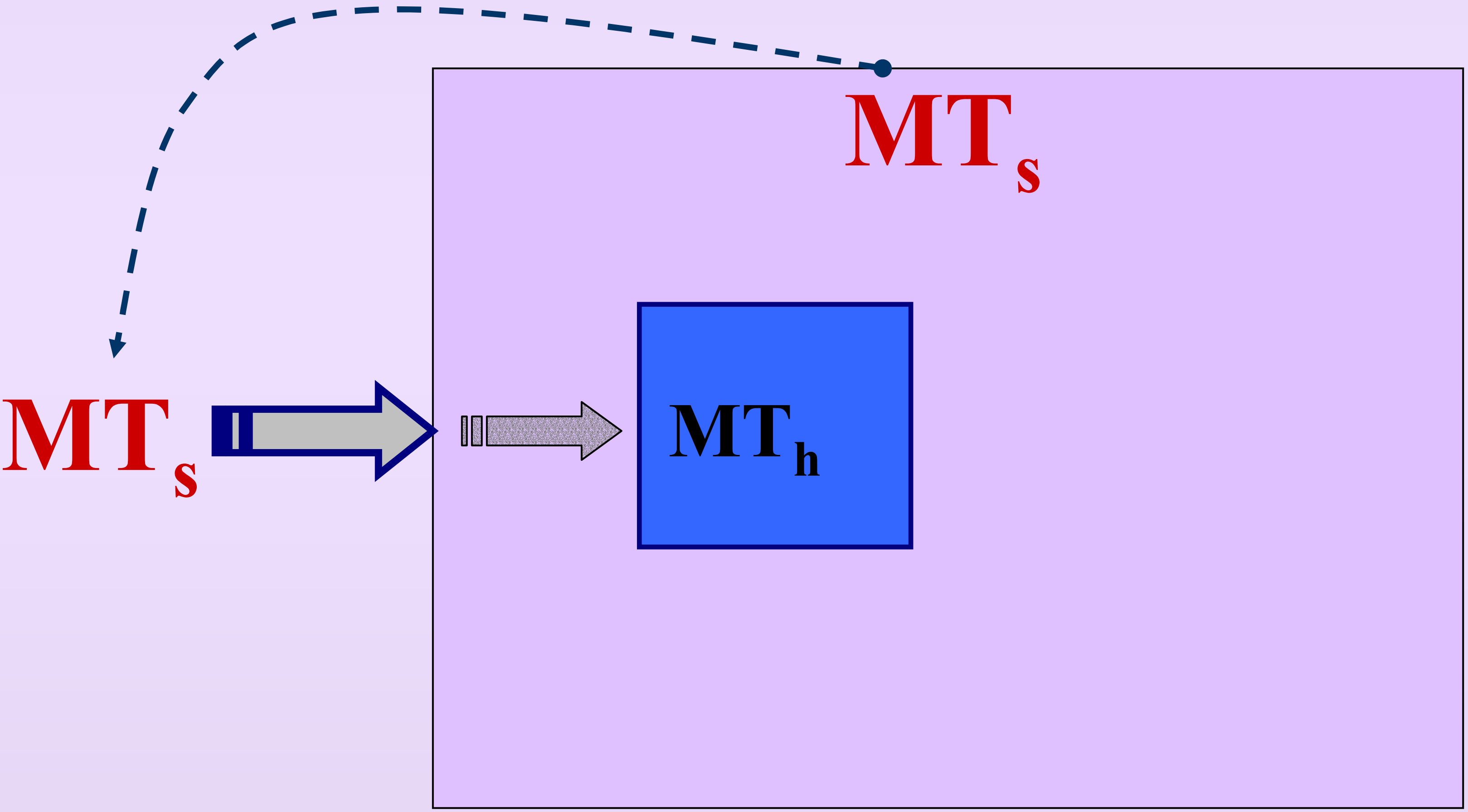
- Para ver por qué la entrada MT_s causa una contradicción, supongamos dos casos:
  1. Que MT_s termina cuando es entrada de sí misma.
  2. Que MT_s no termina cuando es entrada de sí misma.

Caso 1

- MT_s termina cuando es la entrada de sí misma.

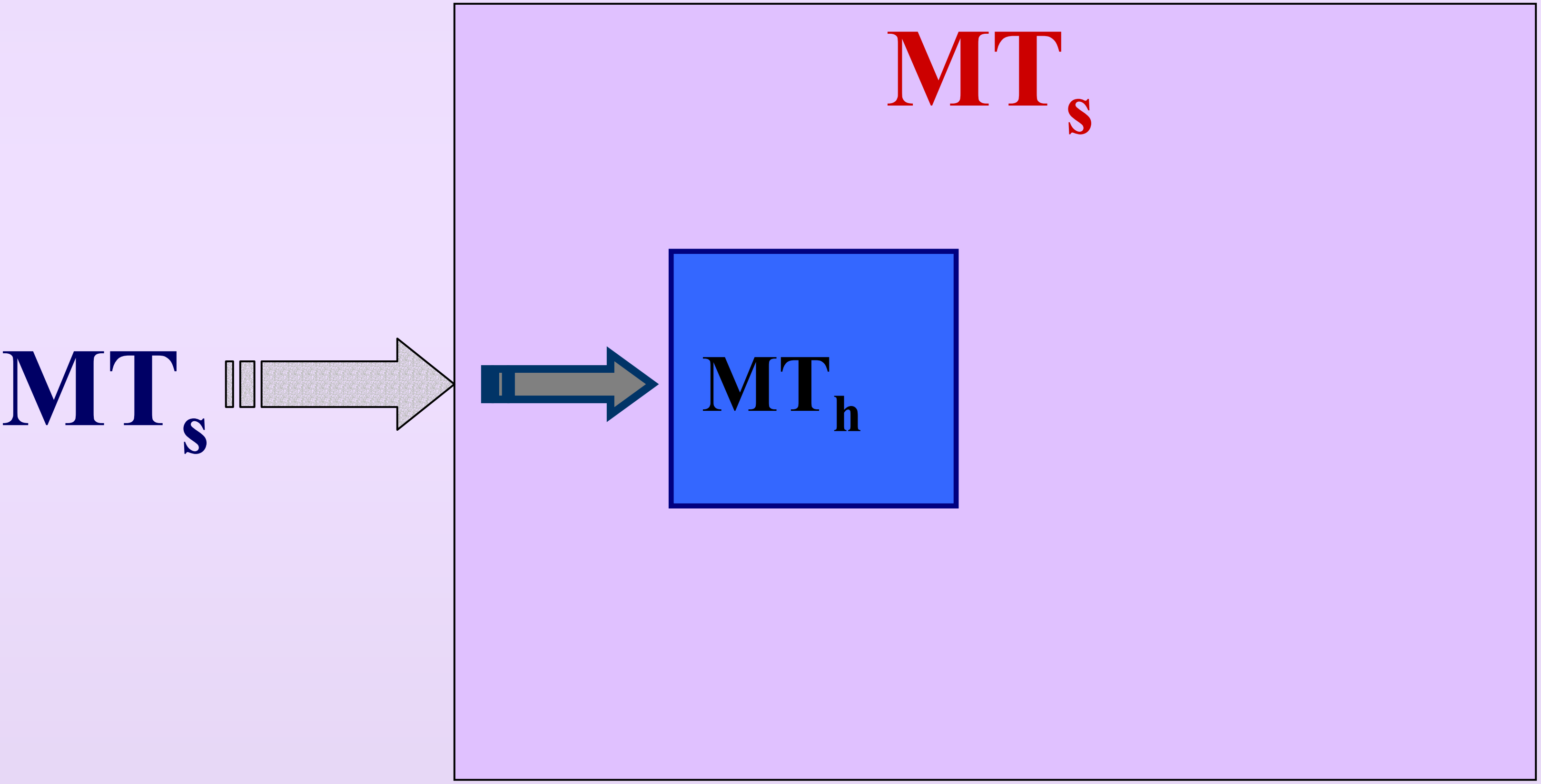
Caso 1

1. MT_s es dada como su propia entrada (**una copia**).



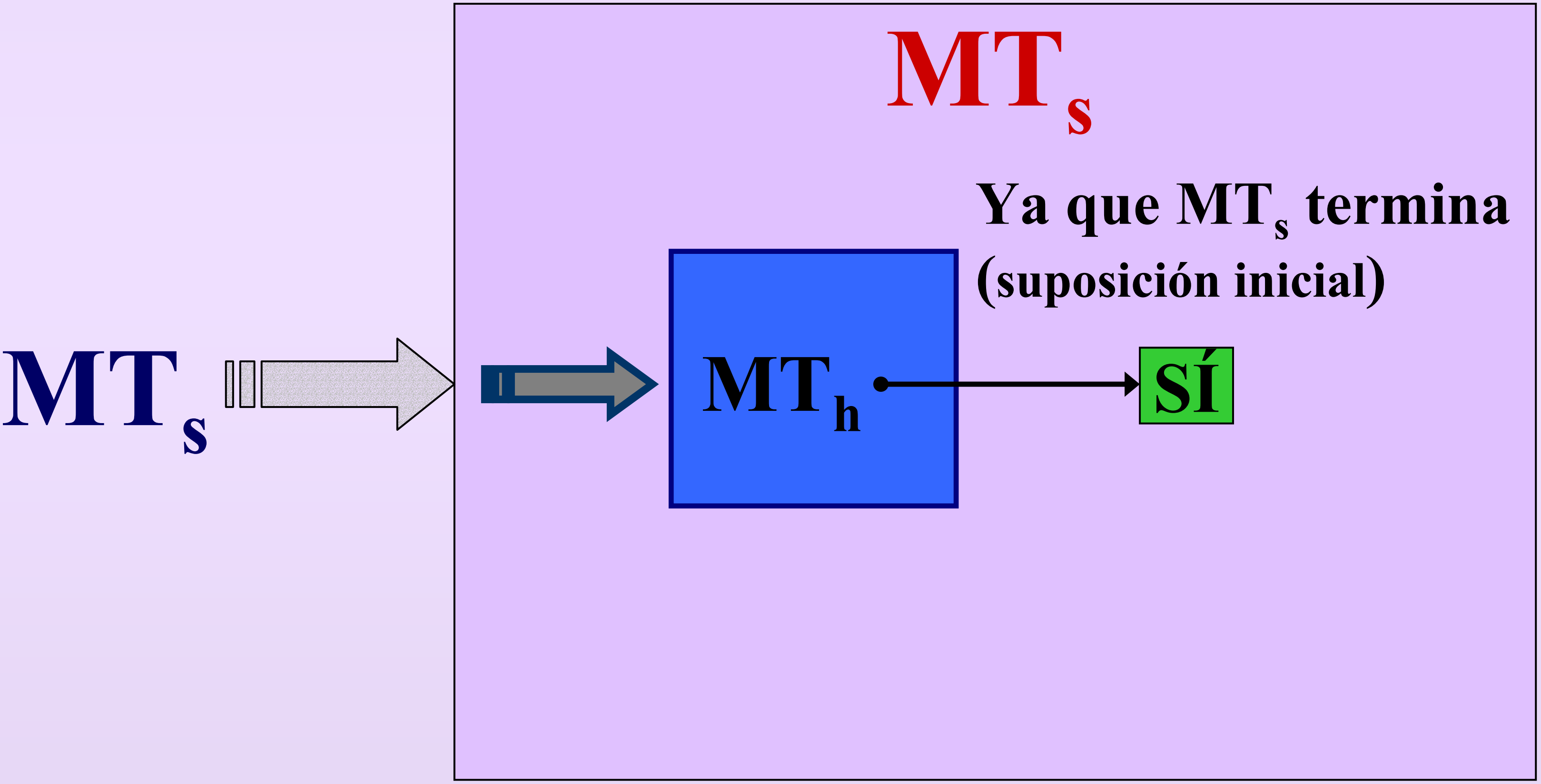
Caso 1

2. MT_h recibe como entrada a MT_s.



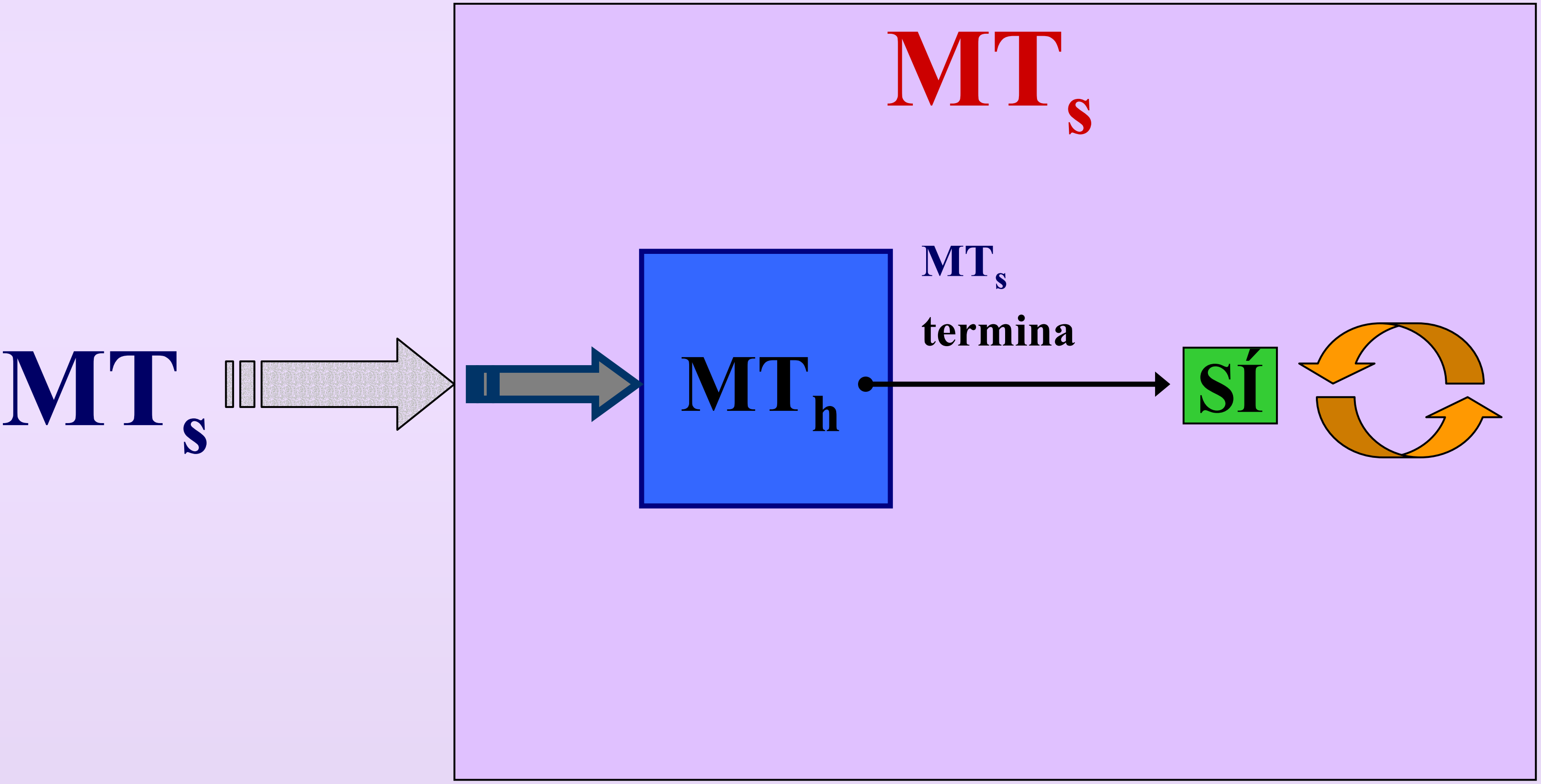
Caso 1

3. Por hipótesis, MT_h responderá 'SÍ' ya que supusimos que MT_s termina.



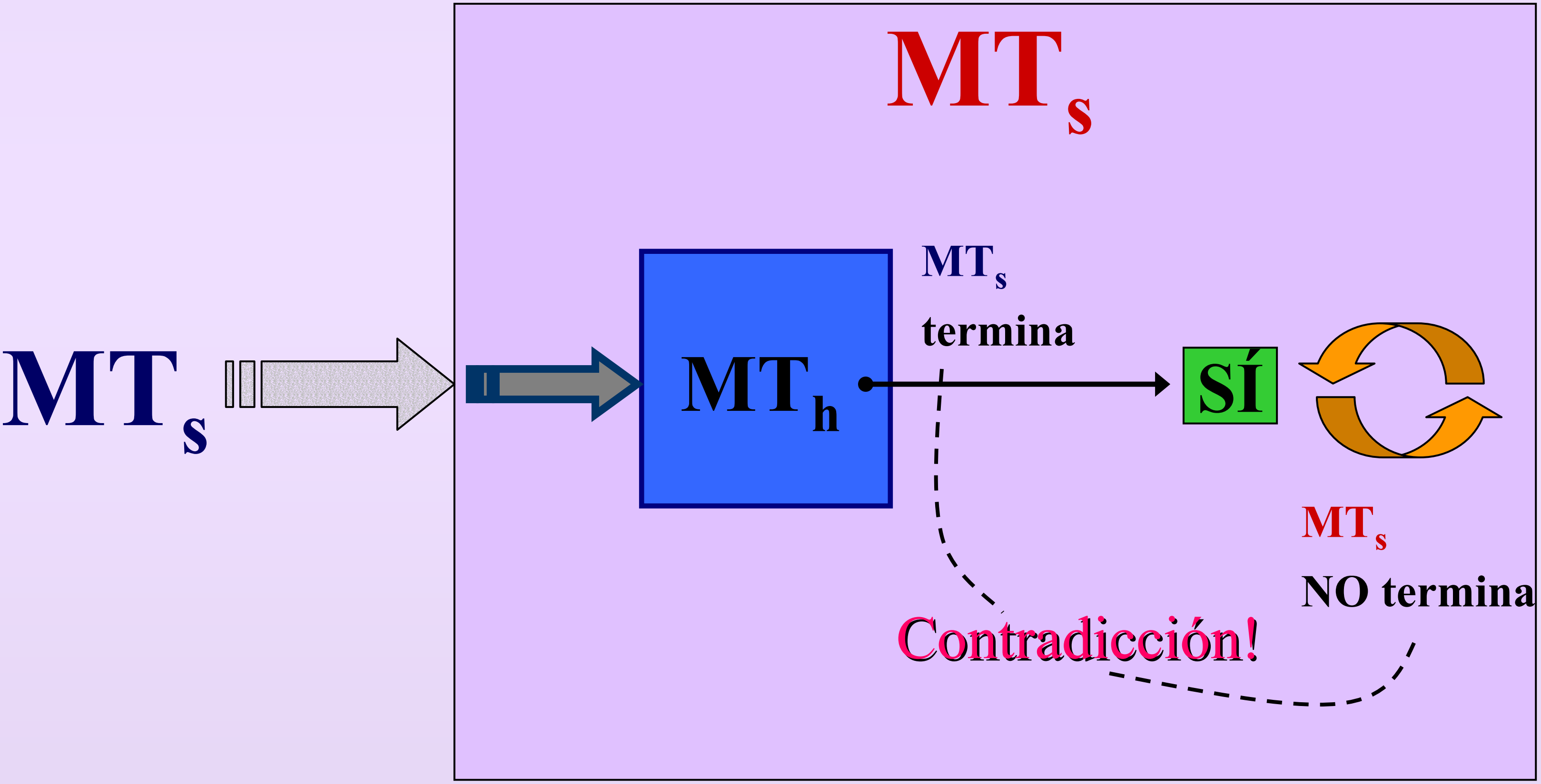
Caso 1

4. Una vez que MT_h responde 'SÍ', comienza un ciclo infinito.



Caso 1

- Esto implica que la suposición de que MT_s termina al aplicarse a sí misma, implica que MT_s no termina!

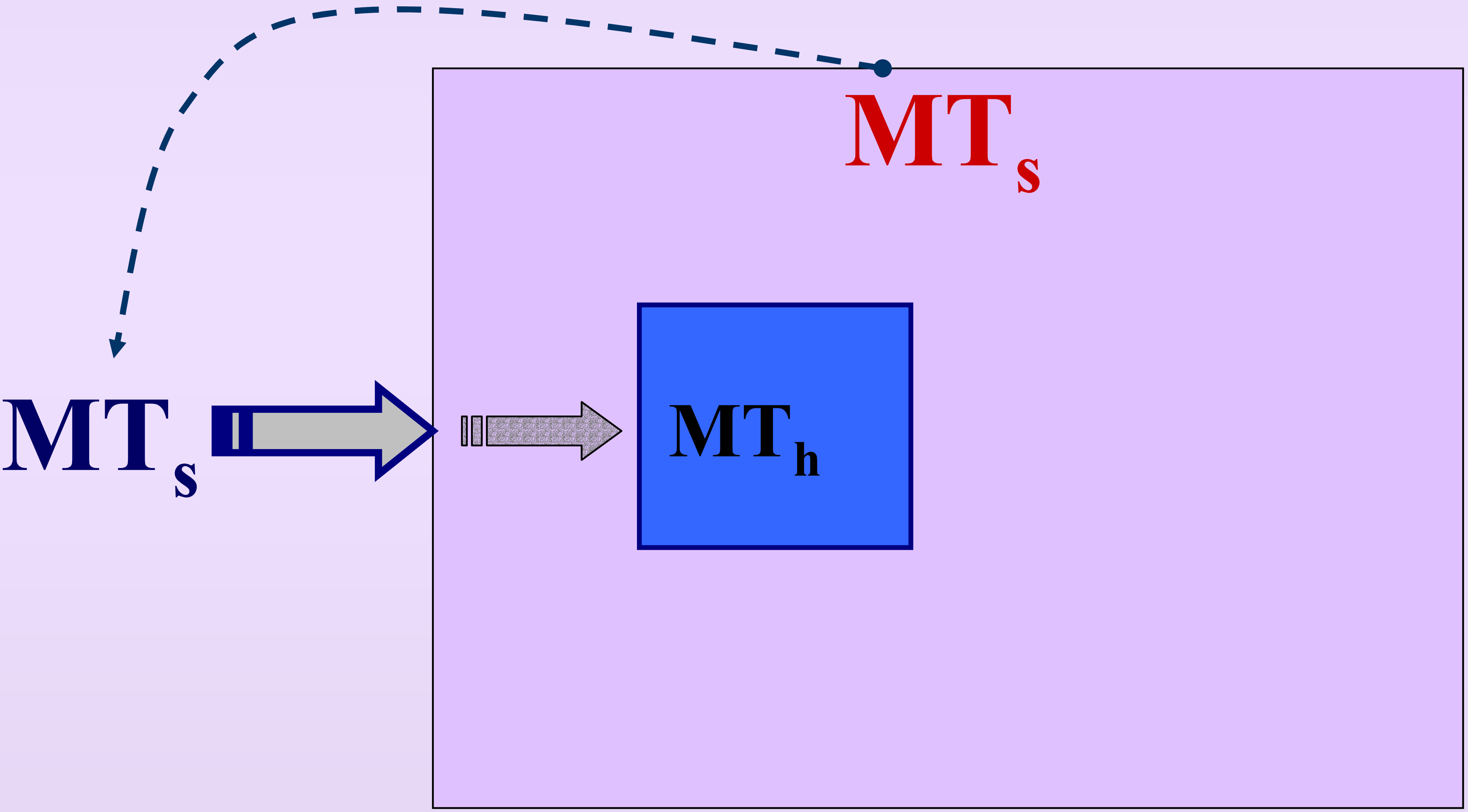


Caso 2

- MT_s no termina cuando es la entrada de sí misma.

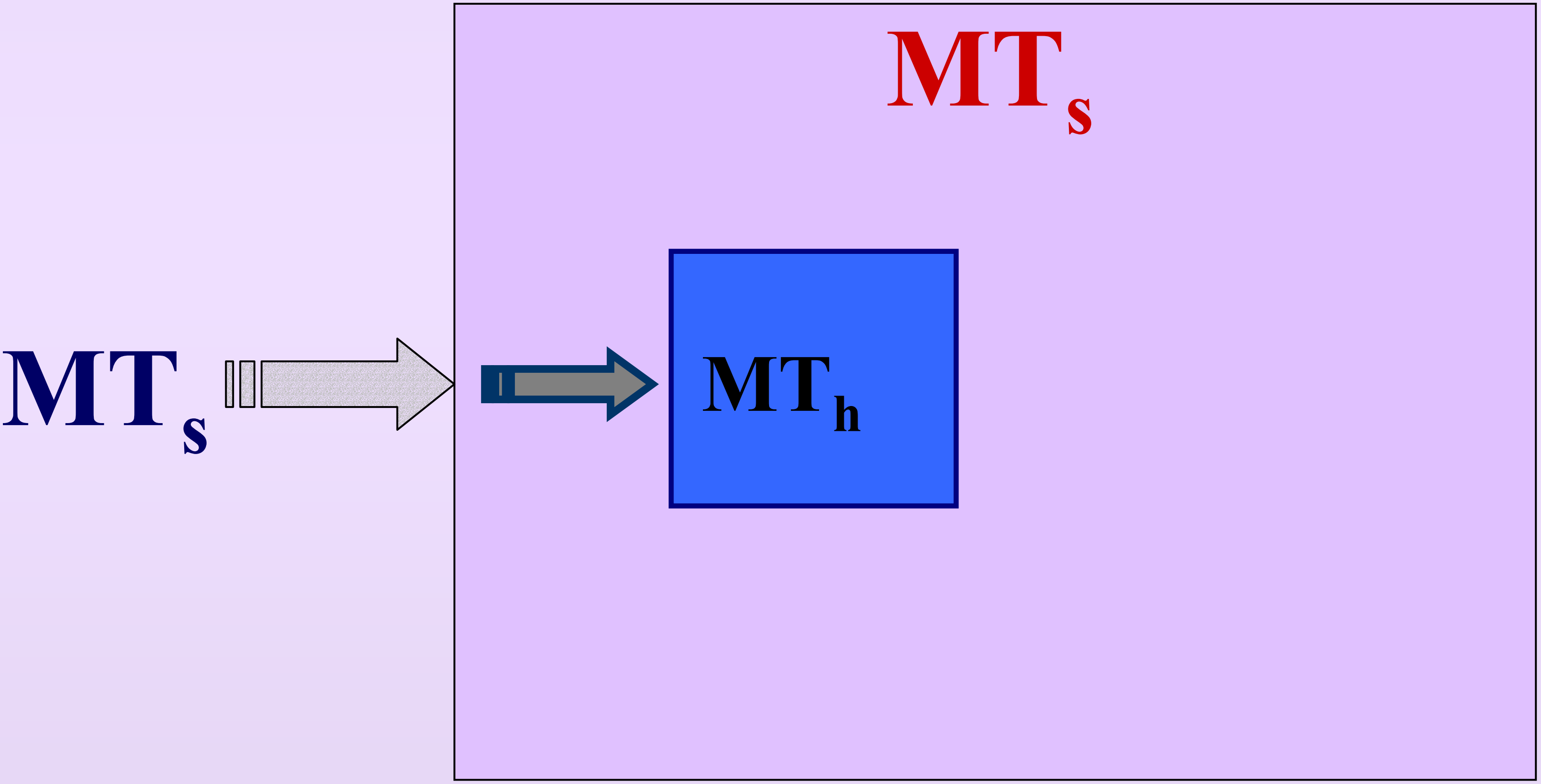
Caso 2

1. MT_s es dada como su propia entrada (**una copia**).



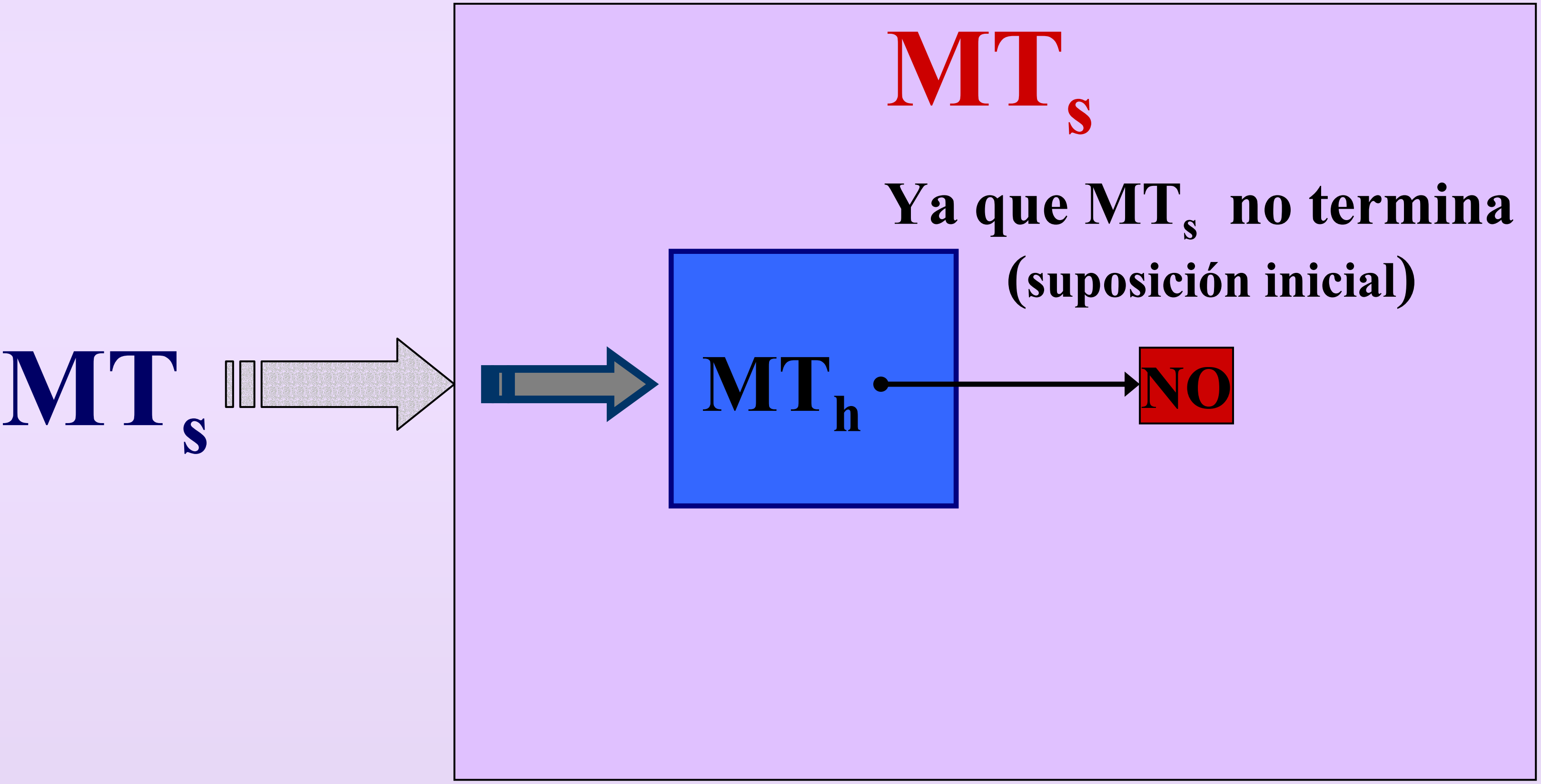
Caso 2

2. MT_h recibe como entrada a MT_s.



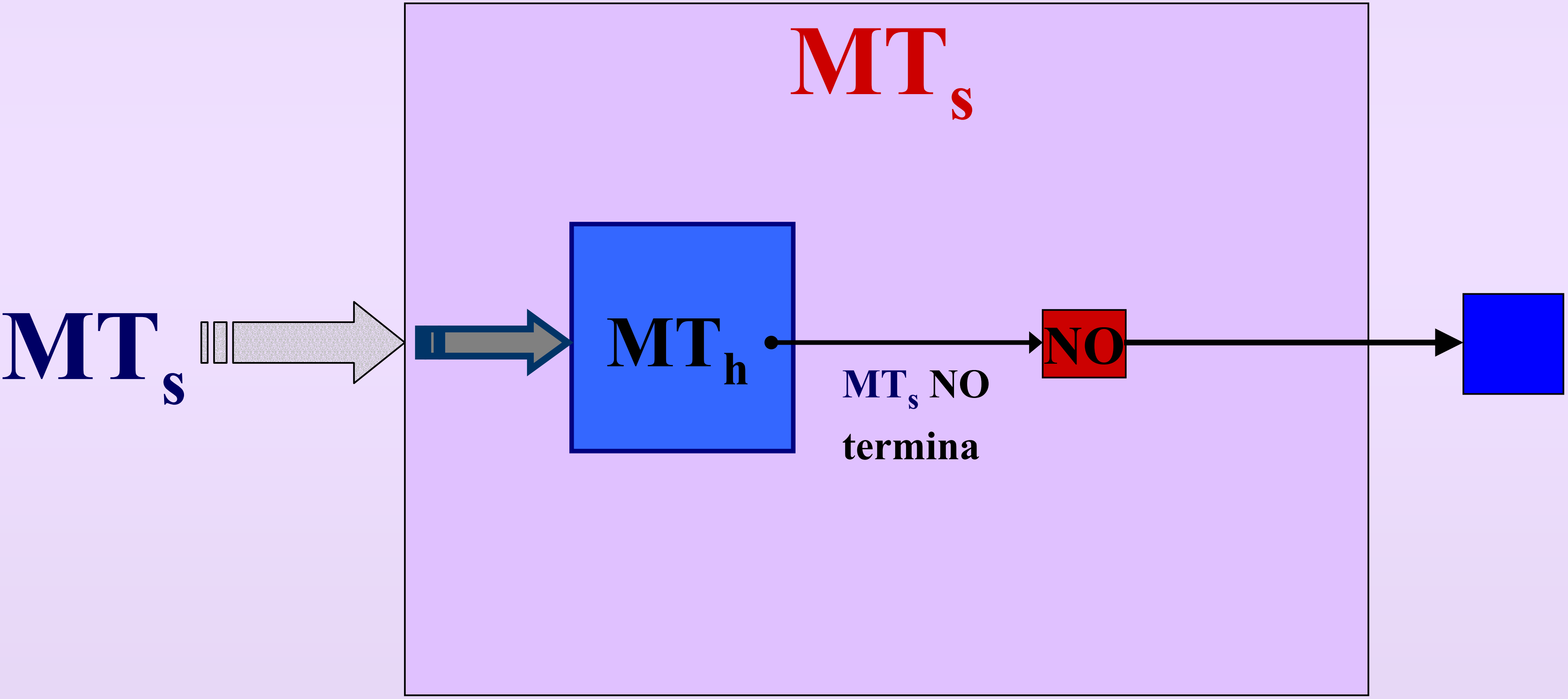
Caso 2

3. Por hipótesis, MT_h responderá '**NO**' ya que supusimos que MT_s no termina.



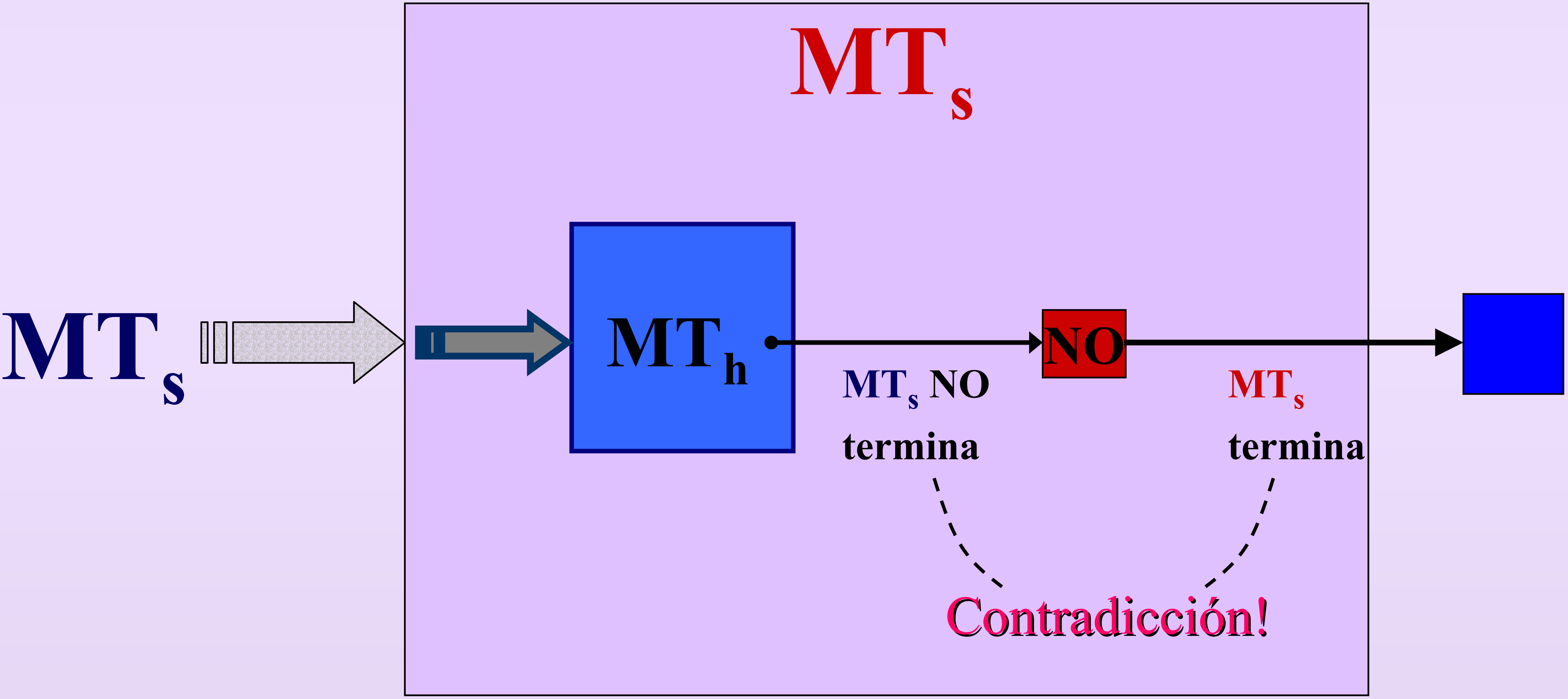
Caso 2

4. Una vez que MT_h responde 'NO', MT_s termina.



Caso 2

- Esto implica que la suposición de que MT_s no termina al aplicarse a sí misma implica que MT_s termina!



Conclusiones

- De los dos casos anteriores, concluimos que cualquiera de las suposiciones sobre MT_s (que MT_s termine o no) implica su negación.
- Esto quiere decir que es imposible tanto que MT_s termine como que no termine!

Conclusión final

- Ya que MT_s fue construido legalmente, la única parte que puede ser responsable de la contradicción es la máquina hipotética MT_h.
- La conclusión final es que una máquina de Turing MT_h que resuelva el problema del paro no existe.
- Por lo tanto el problema del paro es indecidible.